AnW – Woche 3

07.03.2024

Nicolas Wehrli

Heute:

I. Frage vorletzte Woche

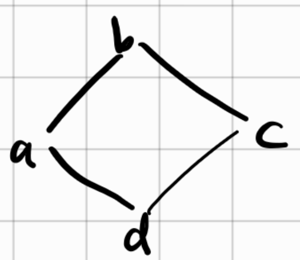
II. Theory Recap
- Satz von Hall (skip Beweis)
- Augmentierende Pfade in bipartiten Graphen
- 3/2 – Approximation metrisches TSP
- Färbungen
- Einführung Wahrscheinlichkeit

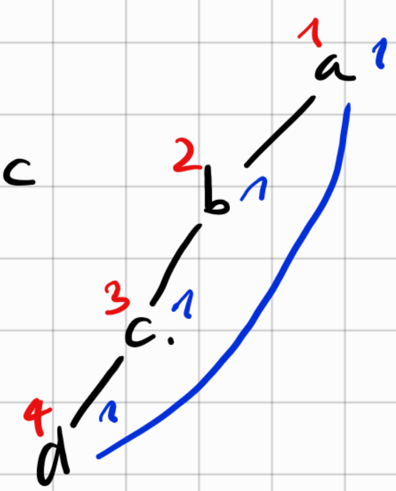
III. Kahoot ?

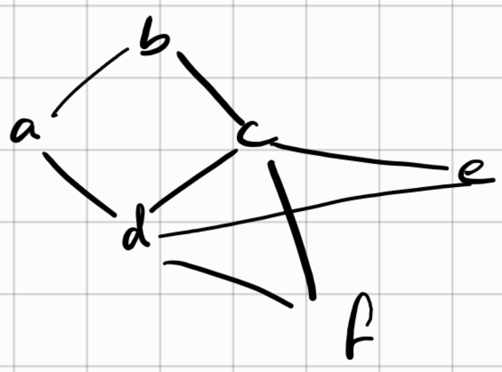
I. Frage vorletzte Woche

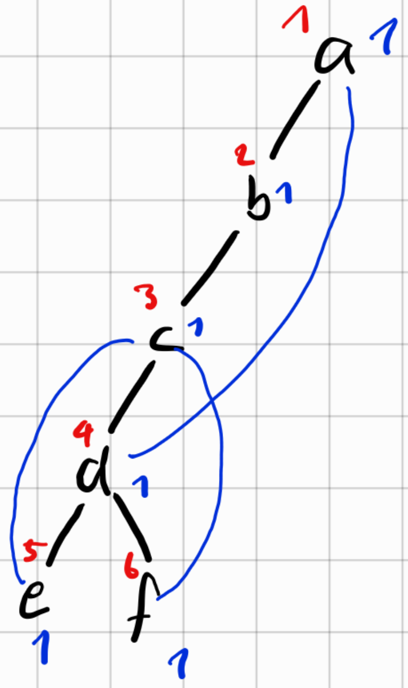
low[v] := kleinste dfs-Nummer, die man von v aus durch einen gerichteten Pfad aus (beliebig vielen) Baumkanten und maximal ~~einer~~ zwei Restkante erreichen kann.

für 2-zsh.? Nein.







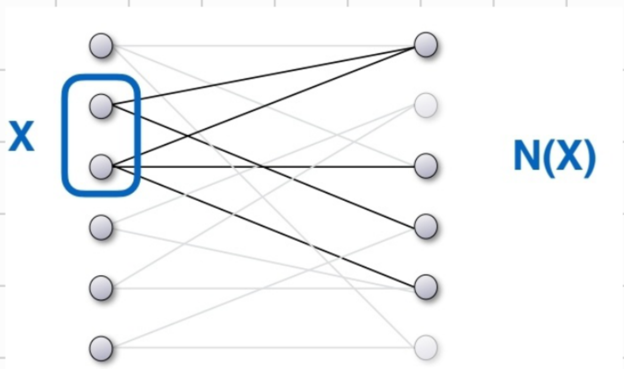


II Theory Recap

Satz von Hall

Satz: (Hall, Heiratssatz)
Ein bipartiter graph G=(A⊎B, E) enthält ein Matching M der Kardinalität |M|=|A| **gdw**
$\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$

Diese Bedingung muss für alle Teilmengen X gelten!



Beweis:

Sei $G = (A \uplus B, E)$ bipartit.

$(\Rightarrow)$: Sei $M \subseteq E$ ein Matching, der Kardinalität $|M| = |A|$.

Im Teilgraphen $H = (A \uplus B, M)$ hat jeder Knoten $x \in X$ in $X \subseteq A$ genau 1 Nachbar und da M ein Matching ist, gilt $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow N(x) \neq N(y)$.

Folglich gilt in H für alle $X \subseteq A$, $|X| = |N(X)|$.

Da $M \subseteq E$ folgt $|X| \leq |N(X)| \quad \forall X \subseteq A$.

$(\Leftarrow)$: Induktion über die Grösse von A:

Sei: $a = |A|$.

<u>Base case</u>: $a = 1$:

$\forall X \subseteq A: |X| \leq |N(X)| \Rightarrow$ Der einzelne Knoten in A ist mindestens zu einer Kante inzident.

$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching der Grösse $a = |A| = 1$.

<u>Induction Hypothesis</u>:

$\forall A$ s.d. $|A| \leq m$:

$\forall X \subseteq A: |X| \leq |N(X)| \Rightarrow \exists$ Matching M mit $|M| = |A|$

Induction Step: $m \to m+1$

Sei $\underbrace{G=(A \uplus B, E)}_{\text{bipartit}}$ mit $|A| = m+1$ beliebig

und es gelte:

$$\forall X \subseteq A: \ |X| \leq |\mathcal{N}(X)| \qquad (*)$$

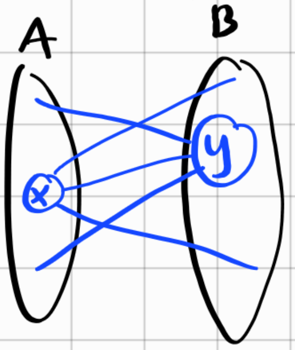
Case distinction:

1. Es gilt $\forall X \subset A,\ X \neq \emptyset: \quad |X| < |\mathcal{N}(X)|$

Wir wählen eine beliebe Kante $e = \{x, y\}$ in E.

Wir fügen diese zum Matching $\mathcal{M}$ hinzu und löschen x, y und alle dazu inzidenten Kanten aus G.

Dann entsteht $G' = (A\setminus\{x\} \uplus B\setminus\{y\}, E')$
wobei $E' = \{ \{a,b\} \in E \mid a, b \notin \{x,y\} \}$



nicht in G'

Da wir nur y von B entfernt haben und $\mathcal{N}(X) \subseteq B$ für alle Teilmengen X, gilt

$(A' = A\setminus\{x\})$

$\forall X \subseteq A'$:

1. $y \in \mathcal{N}_G(X) \Rightarrow |\mathcal{N}_{G'}(X)| = |\mathcal{N}_G(X)| - 1$
2. $y \notin \mathcal{N}_G(X) \Rightarrow |\mathcal{N}_{G'}(X)| = |\mathcal{N}_G(X)|$

$$\Longrightarrow \quad |\mathcal{N}_{G'}(X)| \geq |\mathcal{N}_G(X)| - 1 \quad , \forall X \subseteq A'$$

Aus (1) folgt $|X| < |\mathcal{N}_G(X)| \quad \forall X \subseteq A'$

$$\Longrightarrow \quad |X| \leq |\mathcal{N}_{G'}(X)| \quad \forall X \subseteq A' \quad (*)$$

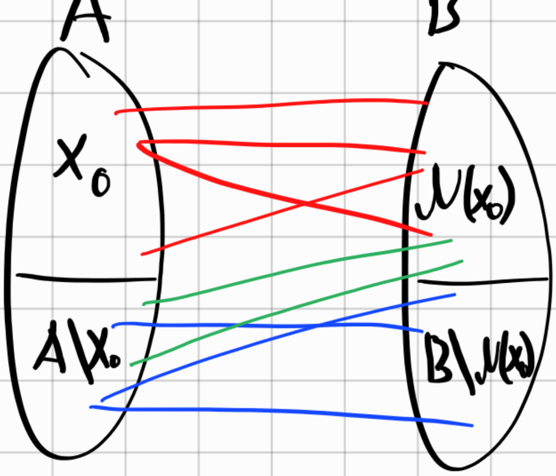
Da $|A'| = m$ und $(*)$ folgt per Induktions Hypothese $\exists$ Matching $\mathcal{M}'$ in G' der Grösse $|A'|$.

$\Longrightarrow \exists$ Matching $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup \{x, y\}$ in G der Grösse $|A|$.

2. $\exists X_0 \subset A, X_0 \neq \emptyset$ s.d. $|X_0| = |\mathcal{N}(X_0)|$

Wir teilen G in 2 induzierte Teilgraphen.

$$G_1 = (X_0 \uplus \mathcal{N}(X_0), E_1) \quad , E_1 = \{\{a,b\} \in E \mid a \in X_0, b \in \mathcal{N}(X_0)\}$$
$$G_2 = (A \setminus X_0 \uplus B \setminus \mathcal{N}(X_0), E_2), \quad E_2 = \{\{a,b\} \in E \mid a \in A \setminus X_0, b \in B \setminus \mathcal{N}(X_0)\}$$



Kanten in G_1
Kanten in G_2

Diese Kanten sind weder in G_1 noch in G_2.

Wir finden nun ein Matching $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ in G_1 und G_2 der Grösse $|\mathcal{M}_1| = |X_0|$ und $|\mathcal{M}_2| = |A \setminus X_0|$
($\Longrightarrow \exists \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ in G mit $|\mathcal{M}| = |A|$.)

1. M_1

$\underline{\forall Y \subseteq X_0:}$ $\quad |N_{G_1}(Y)| = |N(Y)|$

$$\Rightarrow |Y| \leq |N_{G_1}(Y)| \qquad (*)$$

$\Rightarrow \exists$ Matching M_1 per Induktionshypothese

da $|X_0| \leq m$ (Genau hier verwenden wir $\subset$ anstatt $\subseteq$ bei der Case Distinction)

2. M_2

$\underline{\forall Z \subseteq A \setminus X_0:}$

$$|N_{G_2}(Z)| = |N(Z) \setminus N(X_0)| = |N(Z \cup X_0)| - |N(X_0)|$$

Per $(*)$ folgt

$$|Z \cup X_0| - |N(X_0)| \leq \underbrace{|N(Z \cup X_0)| - |N(X_0)|}_{N_{G_2}(Z)}$$

Da Z und X_0 disjunkt und $|N(X_0)| = |X_0|$

$$|Z| + |X_0| - |X_0| = |Z| \leq |N_{G_2}(Z)|$$

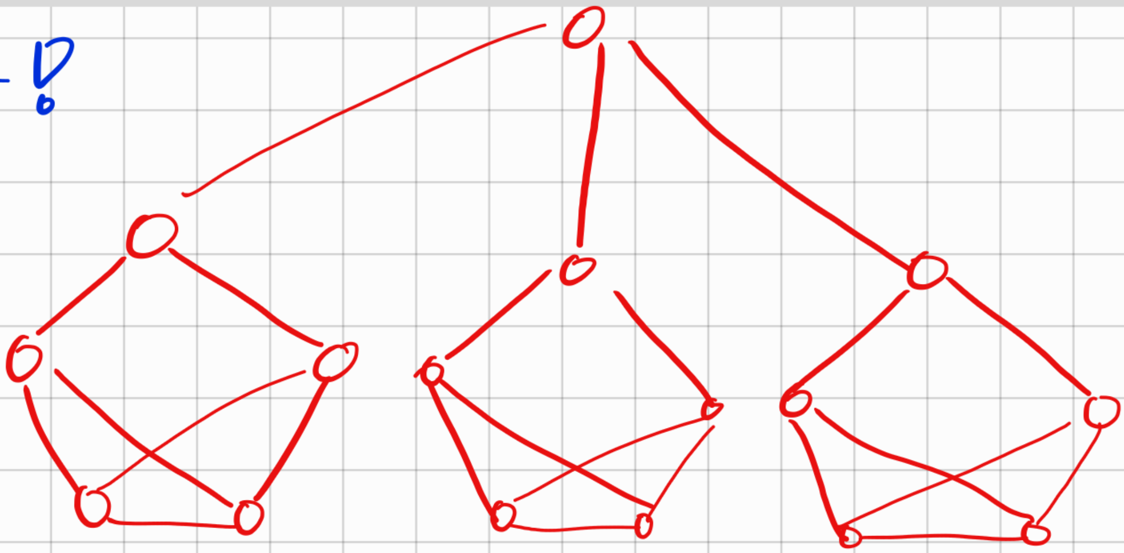
Daraus folgt per Induktionshypothese

$\exists M_2$ mit $|M_2| = |A \setminus X_0|$

$\Rightarrow \exists$ Matching $M = M_1 \cup M_2$ mit $|M| = m+1 = |A|$. $\boxtimes$

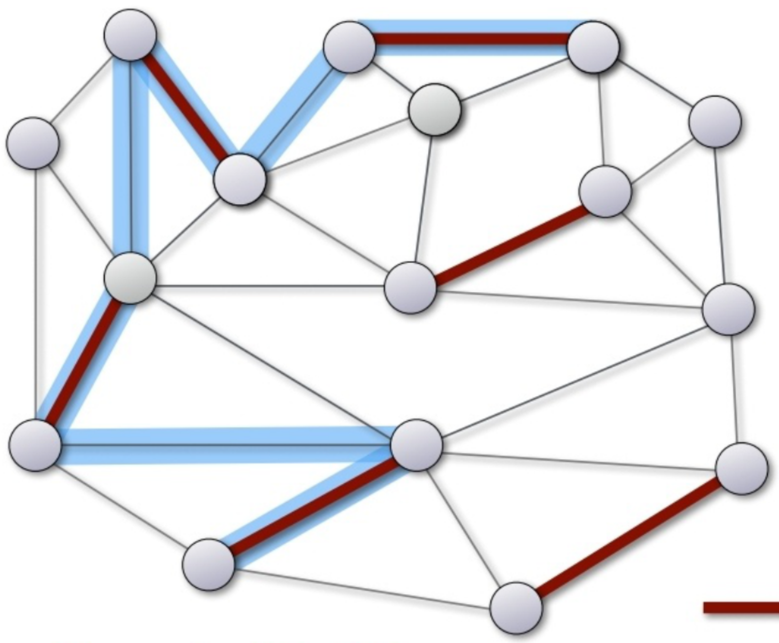
Satz 1.53. Sei $G = (A \uplus B, E)$ ein k-regulärer bipartiter Graph. Dann gibt es $M_1, \ldots, M_k$ so dass $E = M_1 \uplus \ldots \uplus M_k$ und alle M_i, $1 \leq i \leq k$, perfekte Matchings in G sind.

bipartit!



3-regulär aber $\nexists$ perfektes Matching

Augmentierende Pfade



Ein **M-augmentierender Pfad P** ist ein Pfad, der abwechselnd Kanten aus **M** und nicht aus **M** enthält und der in von **M** nicht überdeckten Knoten beginnt und endet.

⇒ durch *Tauschen* entlang M können wir das Matching vergrössern:

M' := M ⊕ P

XOR

Satz (Berge, 1957): Jedes Matching, das nicht (kardinalitäts-) maximal ist, besitzt einen augmentierenden Pfad.

Algorithmus

Input: Graph G = (V, E)
Output: maximales Matching M

Starte mit M = ∅.
repeat

- Suche augmentierenden Pfad P.
- **if** kein solcher Pfad existiert **then return** M.
- **else** M := M ⊕ P.

Wie?

Suchen/Finden eines augmentierenden Pfades:

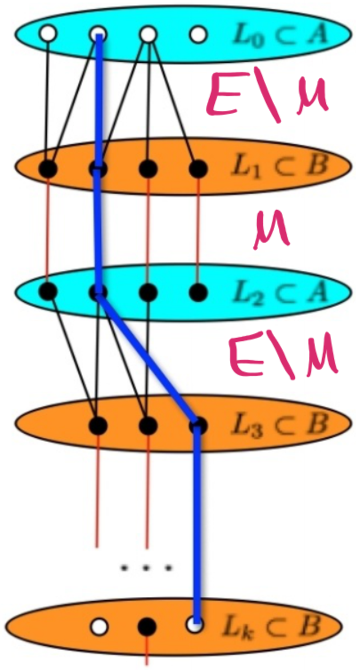
- in bipartiten Graphen in Zeit $O(|V|+|E|)$. Mit BFS, sehen wir gleich.
- in allgemeinen Graphen in Zeit $O(|V|\cdot|E|)$. Blossom-Algorithmus von Edmond, deutlich technischer, sehen wir nicht.

BFS für alternierende Pfade:
Input: bipartiter Graph $G = (A \uplus B, E)$, Matching M
Output: (kürzester) augmentierender Pfad, falls solche Pfade existieren

L_0 := {unüberdeckten Knoten aus A}
Markiere Knoten aus L_0 als besucht.

for i = 1 **to** n $= |A|$
  if i ungerade **then**
    L_i := {unbesuchte Nachbarn von L_{i-1} via Kanten in $\boxed{E \setminus M}$}
  else (falls i gerade)
    L_i := {unbesuchte Nachbarn von L_{i-1} via Kanten in $\boxed{M}$}
  Markiere Knoten aus L_i als besucht.

if ein Knoten v in L_i ist nicht überdeckt
    then return Pfad zu v (backtracking)

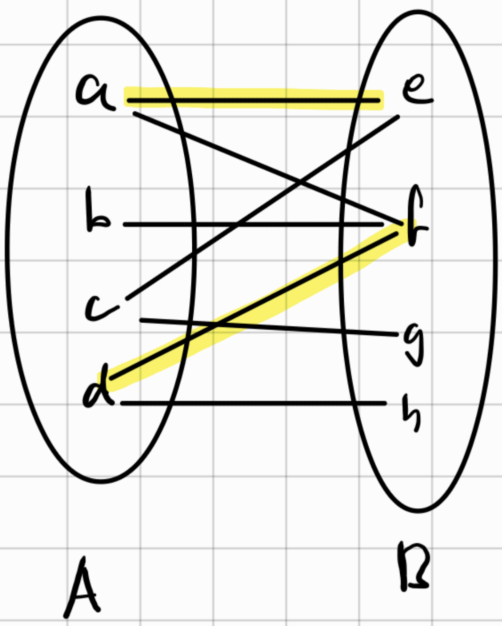


kann nur sein, falls i ungerade

Input:

besucht Array:

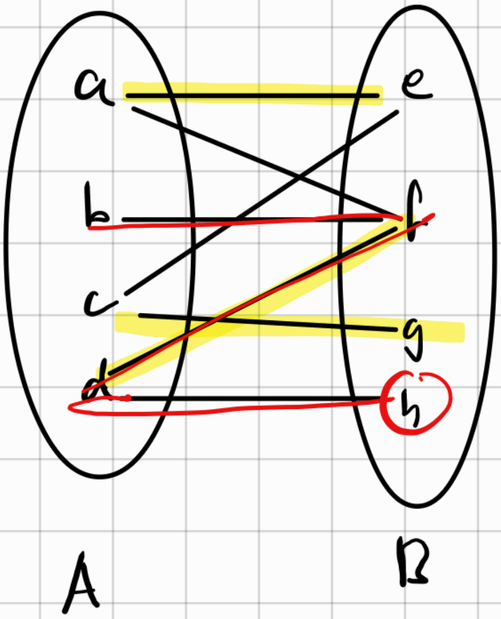
a	b	c	d	e	f	g	h
	bes	bes		c	b	c	



$L_0 = \{b, c\}$

$L_1 = \{e, f, \boxed{g}\}$

found



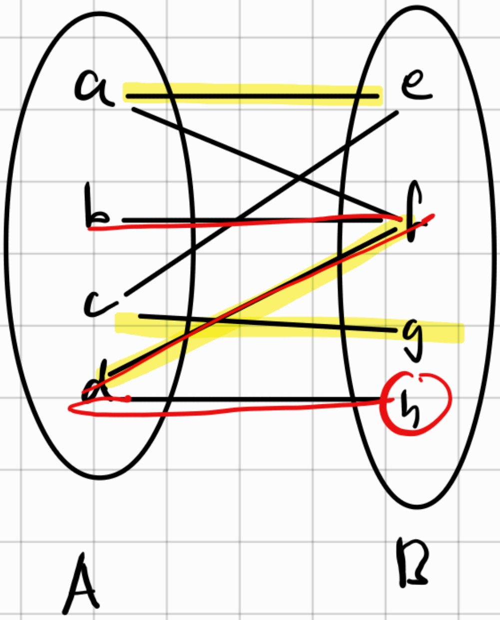
a	b	c	d	e	f	g	h
	bes		f		b		d

$L_0 = \{b\}$

$L_1 = \{f\}$

$L_2 = \{d\}$

$L_3 = \{h\}$



a

In bipartiten Graphen kann man in Zeit $O(|V|\,|E|)$ ein maximales Matching bestimmen.

Hopcroft-Karp (1973): Idee: Suche augmentierende Pfade „gleichzeitig“: Laufzeit $O(|V|^{1/2}\,|E|)$.

Satz: In **k**-regulären bipartiten Graphen kann man in Zeit $O(|E|)$ ein perfektes Matching bestimmen.

Siehe Skript für Beweis dieser Aussage für 2^k-regulär bipartit.

$^3/_2$ -Approx. metrischer TSP

metrisch

$\Updownarrow$

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$

1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(T) \leq \mathrm{opt}(K_n, \ell)$

2'. X:= Knoten mit ungeradem Grad in T
Bestimme minimales Matching **M** *für X*

   es gilt: $\ell(M) \leq \frac{1}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$ [Beweis an der Tafel]

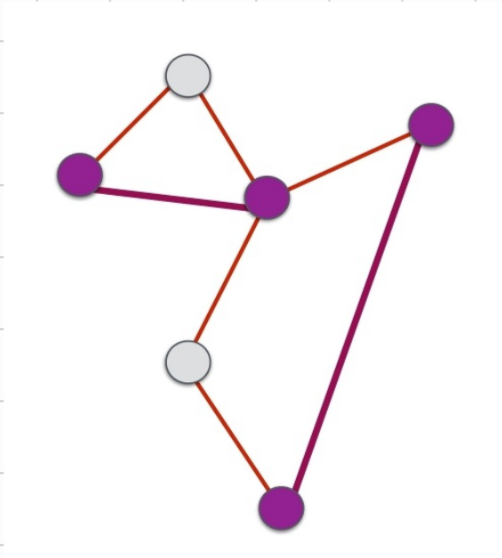
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(W) = \cancel{2\ell(T) \leq 2\mathrm{opt}(K_n, \ell)}$ $\ell(T) + \ell(M) \leq \frac{3}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$

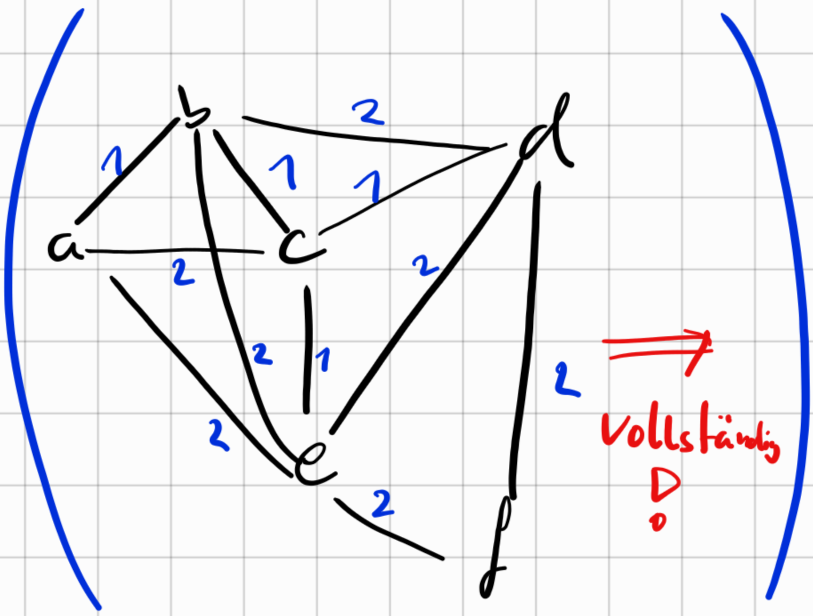
4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

es gilt: $\ell(C) \leq \ell(W) = \cancel{2\ell(T) \leq 2\mathrm{opt}(K_n, \ell)}$ $\ell(T) + \ell(M) \leq \frac{3}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$

wegen Dreiecksungleichung

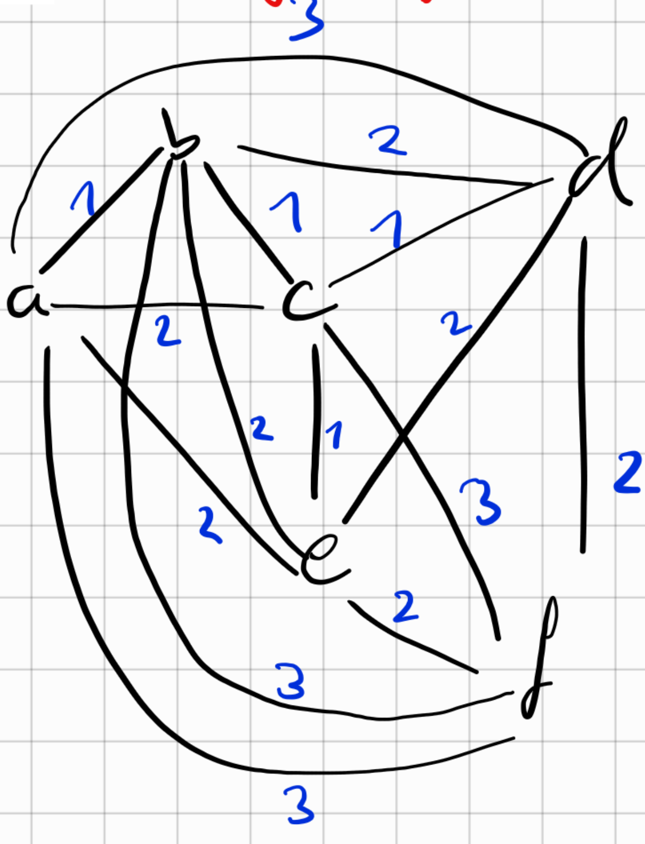


Dreiecksungleichung muss gelten!

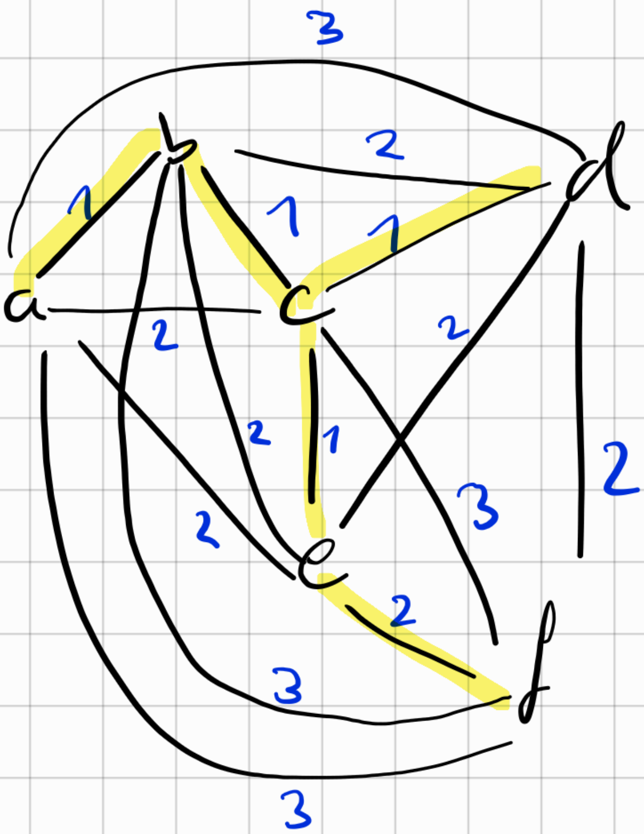


$\Longrightarrow$ vollständig

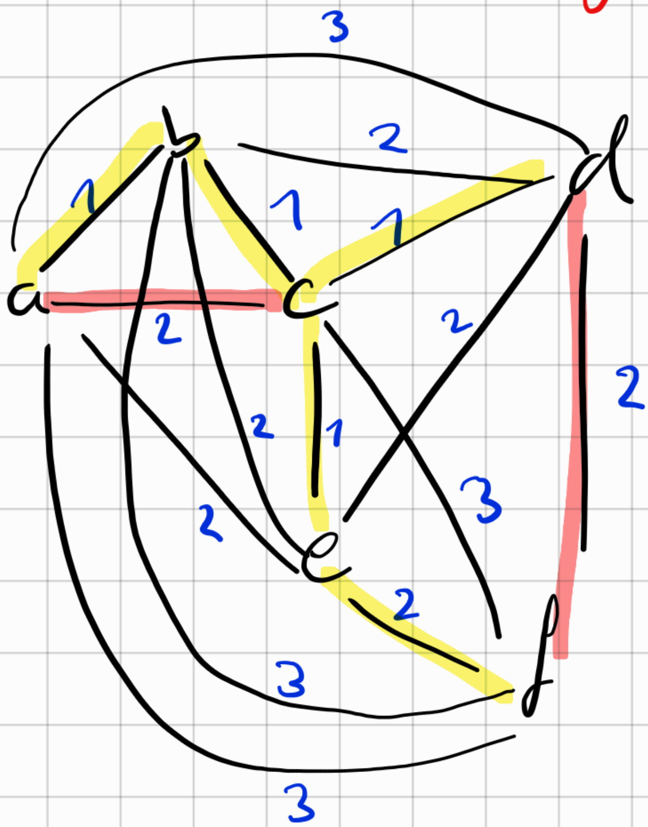
D:



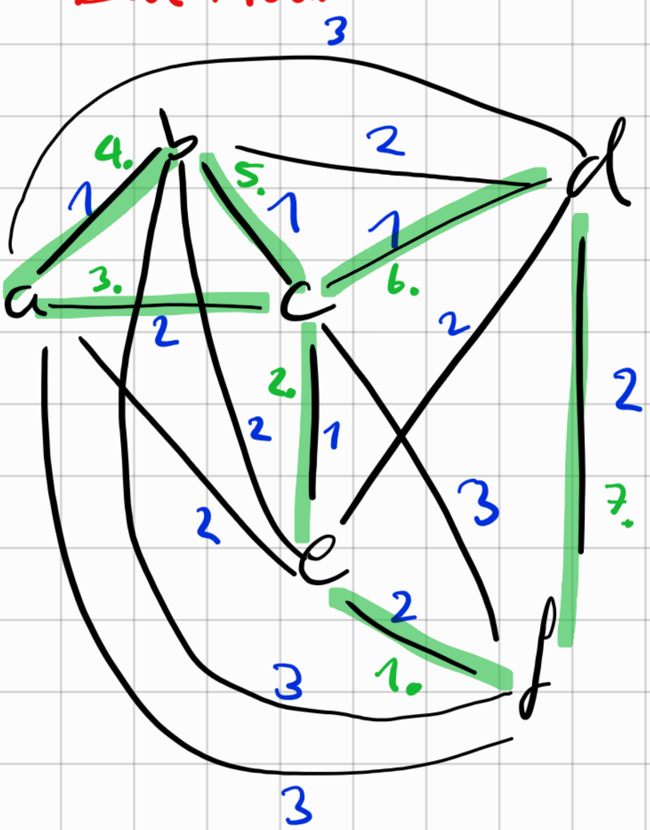
MST



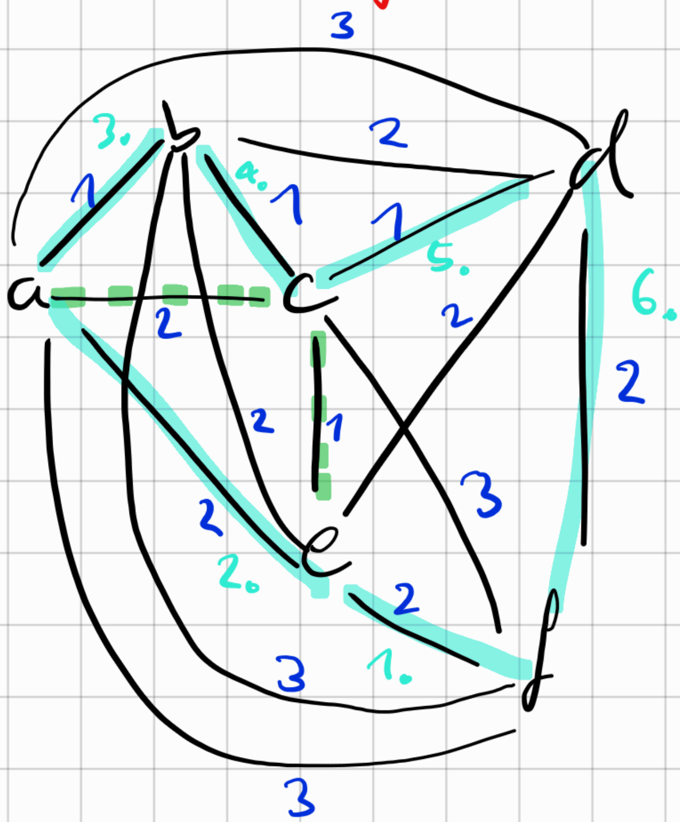
minimales Matching



Eulertour



Abkürzungen



Wir beweisen nun $\ell(M) \leq \frac{1}{2} \operatorname{opt}(K_n, \ell)$.

Sei S die Menge der Knoten im MST T mit ungeradem Grad.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{In jedem Graphen:} \\ \displaystyle\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E| \\ \displaystyle\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg(v) \equiv_2 0 \\ \#\text{Knoten mit ungeradem Grad} \equiv_2 0\end{array}}$$

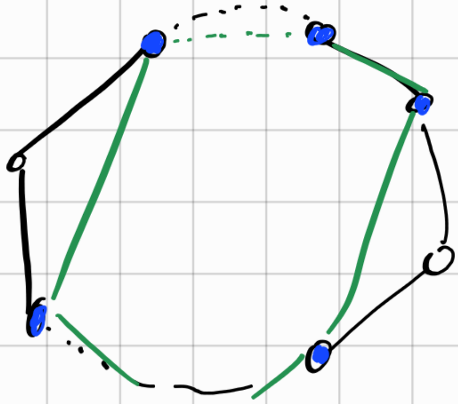
Da $|S|$ gerade ist, und der Graph beim TSP-Problem ein vollständiger Graph ist, existiert ein perfektes Matching.

Wir betrachten den Hamiltonkreis C_{opt} mit $\ell(C_{opt}) = \operatorname{opt}(K_n, \ell)$.

Wir zerlegen C_{opt} nun in $|S|$ Pfade mit den Knoten aus S als Endpunkte. Da ℓ die Dreiecksungleichung erfüllt, können wir die Pfade je durch eine direkte Kante ersetzen, ohne das Gewicht des Kreises zu erhöhen.

Wir nennen diesen neuen Kreis C_S. Es folgt $\ell(C_S) \leq \ell(C_{opt}) = \operatorname{opt}(K_n, \ell)$.

C_{opt}:

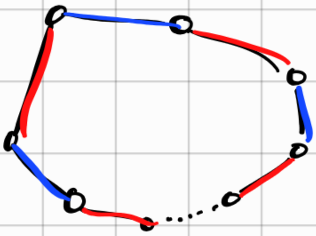


Knoten S

Kanten in C_S

Der Kreis C_S lässt sich nun als die disjunkte Vereinigung zweier Matchings $C_S = M_1 \cup M_2$ beschreiben

C_S:



M_1

M_2

$$\ell(M_1) + \ell(M_2) = \ell(C_S)$$

Sei o.B.d.A. $\ell(M_1) \leq \ell(M_2)$ und $M = M_1$

$$\Rightarrow \ell(M) \leq \frac{1}{2} \ell(C_S)$$

(Sonst wäre die Summe $\ell(M_1) + \ell(M_2) > \ell(C_S)$)

$$\Rightarrow \ell(M) \leq \frac{1}{2} \operatorname{opt}(K_n, \ell)$$

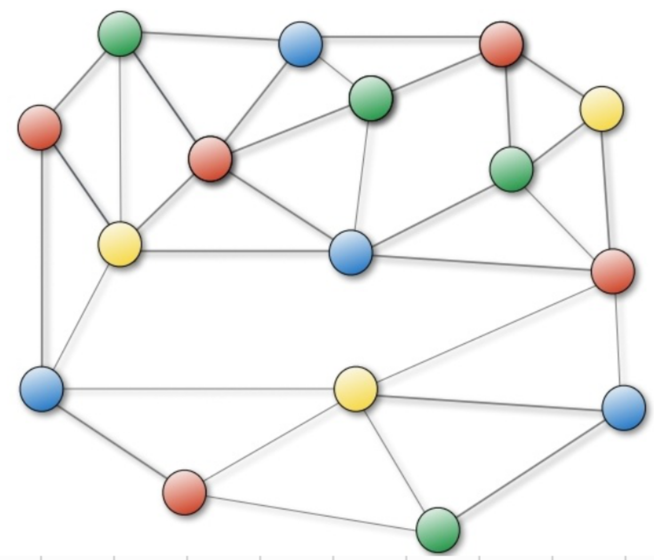
$\boxtimes$

Färbungen

Definition 1.56. Eine *(Knoten-)Färbung* (engl. *(vertex) colouring*) eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c: V \to [k]$, sodass gilt

$$c(u) \neq c(v) \quad \text{für alle Kanten } \{u, v\} \in E.$$

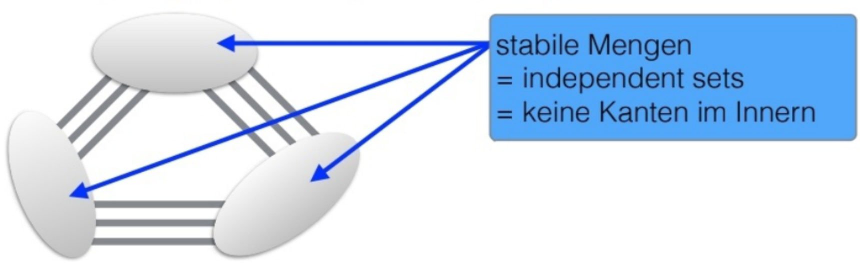
Bsp.



Die *chromatische Zahl* (engl. *chromatic number*) $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt wird.

Alternativ:

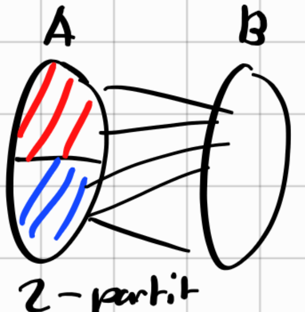
Äquivalente Formulierung: $\chi(G) \leq k$ gdw. G k-partit

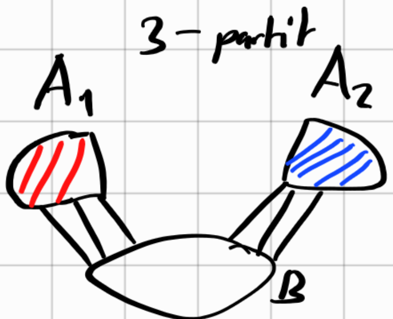


Spezialfall: $\chi(G) \leq 2$ gdw. G bipartit

Bmk: k-partit $\Longrightarrow$ k+1 partit

Bsp.: bipartit





Satz: Für jedes $k \geq 3$ ist das Problem

„Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, gilt $\chi(G) \leqq k$?“

NP-vollständig.

Alternativen?

Exponentieller Algorithmus?	**Ja**, mit Inklusion/Exklusion. (Polynomieller Speicher und Zeit $O(2.2^n)$)
Approximationen?	**Nein.** Für jedes $\varepsilon > 0$ ist es NP-schwer, eine $n^{1-\varepsilon}$-Approximation zu finden.
Spezialfälle?	**Ja.** Wir werden einige Arten von Graphen sehen, für die es gute Algorithmen gibt.

Satz 1.59 (Vierfarbensatz). Jede Landkarte lässt sich mit vier Farben färben.

Versuchen wir's mal zu lösen:

GREEDY-FÄRBUNG (G)

1: wähle eine beliebige Reihenfolge der Knoten: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
2: $c[v_1] \leftarrow 1$
3: **for** $i = 2$ **to** $i = n$ **do**
4: $\quad c[v_i] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c(u)$ für alle $u \in N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}\}$

Satz 1.60. Sei G ein zusammenhängender Graph. Für die Anzahl Farben $C(G)$, die der Algorithmus GREEDY-FÄRBUNG benötigt, um die Knoten des Graphen G zu färben, gilt

$$\chi(G) \leq C(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ist der Graph als Adjazenzliste gespeichert, findet der Algorithmus die Färbung in Zeit $O(|E|)$.

Sei x der Knoten mit $\deg(x) = \Delta(G)$.

Im schlimmsten Fall sind alle Nachbarn schon gefärbt, wenn wir x färben wollen.

Beobachtung:
Gilt für die (gewählte) Reihenfolge $|N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}| \leq k \quad \forall\, 2 \leq i \leq n$, dann benötigt der Greedy-Algorithmus höchstens **k+1** viele Farben.

Heuristik:
v_n := Knoten vom kleinsten Grad. Lösche v_n.
v_{n-1} := Knoten vom kleinsten Grad im Restgraph. Lösche v_{n-1}. Iteriere.

Falls $G=(V,E)$ erfüllt:
In jedem Subgraphen gibt es einen Knoten mit Grad $\leq k$
⇒ Heuristik liefert Reihenfolge $v_1,\ldots,v_n$ für die der Greedy-Algorithmus höchstens $k+1$ Farben benötigt

Satz: Einen 3-färbbaren Graphen kann man in Zeit $O(|V|+|E|)$ mit $O(\sqrt{|V|})$ Farben färben.

Algorithmus:
While es gibt Knoten v, der $> \sqrt{|V|}$ ungefärbte Nachbarn hat:
Färbe v mit neuer Farbe und seine Nachbarn mit 2 weiteren neuen Farben.
Lösche alle gefärbten Knoten. Der Restgraph hat Maximalgrad $\Delta \leq \sqrt{|V|}$
Färbe verbleibende Knoten mit Greedy-Algorithmus mit $\Delta + 1$ neuen Farben.

Satz 1.64 (Satz von Brooks). Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, der weder vollständig ist noch ein ungerader Kreis ist, also $G \neq K_n$ und $G \neq C_{2n+1}$, so gilt

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

und es gibt einen Algorithmus, der die Knoten des Graphen in Zeit $O(|E|)$ mit $\Delta(G)$ Farben färbt.

Aufgabe 1 – *Lateinisches Rechteck*

Ein lateinisches $r \times n$-Rechteck ($r \leq n$) ist eine Anordnung der Zahlen $1, \ldots, n$ in r Zeilen und n Spalten, so dass in jeder Zeile und jeder Spalte jede Zahl höchstens einmal vorkommt. Ein lateinisches n-Quadrat ist ein lateinisches $n \times n$-Rechteck.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

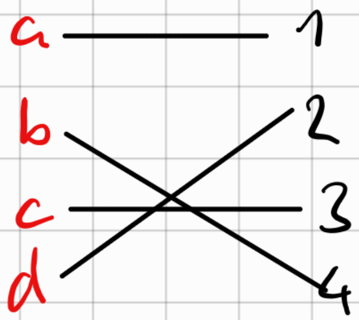
Beispiel eines lateinischen 3×4-Rechtecks.

Angenommen wir haben ein lateinisches $r \times n$-Rechteck mit $r < n$ gegeben. Wir wollen sehen, ob wir es zu einem lateinischen n-Quadrat erweitern können. Das heisst, wir wollen $n - r$ weitere Zeilen mit Zahlen aus $1, \ldots, n$ zu dem Rechteck hinzufügen, ohne eine Spalte oder eine Zeile in der eine Zahl mehrfach vorkommt zu erhalten.

(a) Angenommen wir haben ein lateinisches $r \times n$-Rechteck wie oben beschrieben. Wir wollen zeigen, wann man dieses zu einem $(r+1) \times n$-Rechteck erweitern kann. Beschreiben Sie, wie man dieses Problem mit einem bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ modellieren kann und zeigen Sie, dass die Erweiterung genau dann möglich ist, wenn G ein perfektes Matching hat.

Hinweis: In (*a*) kann es hilfreich sein, die Knoten in A mit 'Spalte 1', 'Spalte 2',... zu labeln und die Knoten aus B mit 'Nummer 1', 'Nummer 2',.... Was sind dann die Kanten? Was ist die entsprechende Bedeutung eines perfekten Matchings in Bezug auf das lateinische Quadrat?

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Wir konstruieren $G = (A \uplus B, E)$:

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $\quad a_i \sim$ "Spalte i"

$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ $\quad b_j \sim$ "Zahl j"

$\{a_i, b_j\} \in E \iff$ Zahl j noch nicht in Spalte i

Noch zu zeigen:

Lateinisches Rechteck erweiterbar

$\Leftrightarrow$

G hat ein perfektes Matching

($\Rightarrow$): Lateinisches Rechteck erweiterbar durch Reihe $(x_1, \dots, x_n)$.

Sei: $M = \{\{a_1, x_1\}, \dots, \{a_n, x_n\}\}$.

Da x_i nicht in Spalte i

$\Rightarrow \{a_i, x_i\} \in E \quad \forall i \in [n]$

$\Rightarrow M \subseteq E$ (1)

Da alle x_i verschieden $\Rightarrow$ Jeder Knoten in B wird von maximal einer Kante in M überdeckt. (2)

Per Definition von A gilt dasselbe für alle Knoten in A.

(1), (2) $\Rightarrow$ M ist ein Matching.

$$|M| = n = \frac{2n}{2} = \frac{|V|}{2}$$

M ist ein perfektes Matching.

$(\Leftarrow)$: Sei M ein perfektes Matching von G.

$$\forall \{a_i, b_j\} \in M \subseteq E$$

$$x_i = b_j .$$

Wir erweitern das Rechteck mit $(x_1, \dots, x_n)$.

Da $\{a_i, b_j\} \in E$, Zahl j noch nicht in Spalte i.

$\Rightarrow x_i$ noch nicht in Spalte i.

Da M ein Matching, $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$.

$\square$

- Manchmal fehlt der Bezug von modellierten Graphen zum ursprünglichen Problem.

$$\begin{tikzcd}
\text{Ausgangslage} \arrow[rr, squiggly, "\text{direkte Lösung (meist schwierig)}"] \arrow[d, shift left, "\text{Konstruktion } (\text{i.e } V := \dots,\ E := \dots)"] & & \text{Lösung} \arrow[d, shift right] \\
\text{Modellierung (Graph)} \arrow[u, shift left] \arrow[rr, "\text{Satz von Dirac}", "\text{(u. anderes)}"'] & & \text{Hamiltonkreis} \arrow[u, shift right, "\text{oft nicht hingeschrieben}"']
\end{tikzcd}$$

(b) Zeigen Sie, dass der in (a) konstruierte Graph regulär ist. Das heisst, zeigen Sie, dass es eine ganze Zahl k gibt, sodass alle Knoten (sowohl die Knoten in A als auch die Knoten in B) Grad genau k haben.

(c) Benutzen Sie ihr Ergebnis aus (b) um zu beschreiben, welche $r \times n$-Rechtecke man zu einem lateinischen n-Quadrat erweitern kann.

Einführung Wahrscheinlichkeit

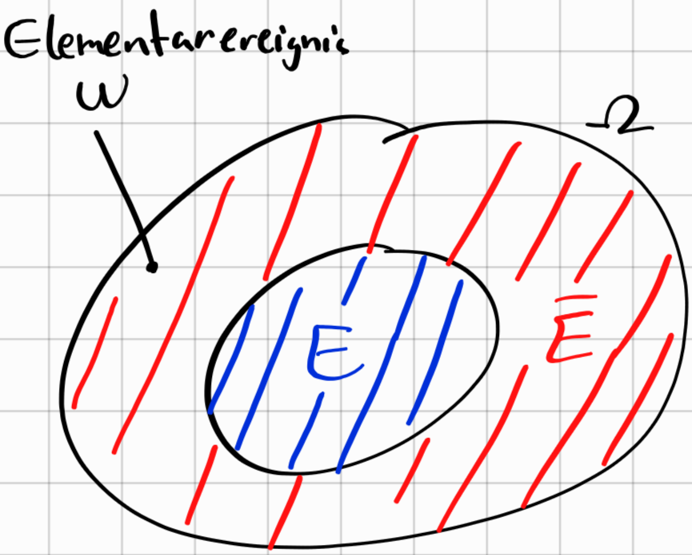
Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine *(Elementar-)Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E.



Ω nicht unbedingt endlich. (aber abzählbar)

Lemma 2.2. Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, \ldots$ gilt:

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $\Pr[A] \leq \Pr[B]$.
5. *(Additionssatz)* Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so folgt
$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$
Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt analog
$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$

1., 2. und 3. sollten klar sein.

4. $A \subseteq B \iff (w \in A \Rightarrow w \in B)$

$\iff \Pr[A] = \sum_{w \in A} \Pr[w] \leq \sum_{w \in B} \Pr[w] = \Pr[B]$

$\iff \Pr[A] \leq \Pr[B]$

5. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

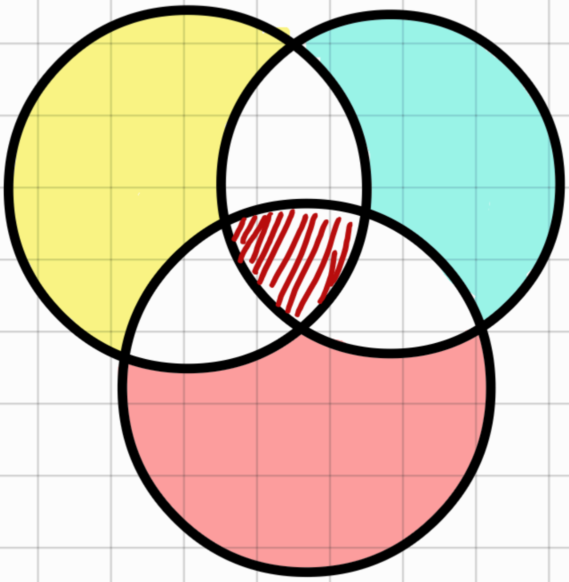
$\Rightarrow w \in A_i \Rightarrow w \notin A_j \quad \forall i \neq j$

$\rightarrow \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$, bzw. $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$

Satz 2.3. *(Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)*
Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\
&+ (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\
&+ (-1)^{n+1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n].
\end{aligned}$$

Example $n=3$:



Union Bound

Satz 2.4. *(Boolesche Ungleichung)* Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$